

Właściwe zrozumienie zależności (1.7) i (1.8) wymaga wyjaśnienia pojęcia pochodnej materialnej (lub inaczej: pochodnej substancjalnej).

1.3. Pochodna materialna

Pochodną materialną (pochodną substancjalną) oznaczać będziemy kółkiem nad funkcją lub symbolem D/Dt , tak aby odróżnić ją od powszechnie znanej pochodnej oznaczanej d/dt .

Dla dowolnej funkcji $F(x_i, t)$ związanej z ruchem cząstek można obliczyć pochodną materialną z zależności:

$$\dot{F} = \frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{x = \text{const}} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

W pełnej postaci pochodną materialną możemy zapisać (wykorzystując umowę sumacyjną) jako:

$$\dot{F} = \frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{x = \text{const}} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad (1.11a)$$

gdzie:

v_i – wektor prędkości cząsteczki,
 t – czas.

Aby zrozumieć sens fizyczny pochodnej materialnej, weźmy pod uwagę wektor prędkości jako funkcję $F(x_i, t)$ związaną z ruchem cząstek materialnych.

Obliczamy pochodną materialną \dot{v}_i zgodnie z równaniem (1.11) i otrzymujemy:

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \quad (1.12)$$

Pochodna materialna \dot{v}_i jest całkowitym przyspieszeniem chwilowym cząsteczki, na które składa się (zgodnie z (1.12)):

- przyspieszenie lokalne $\frac{\partial v_i}{\partial t}$,
- przyspieszenie unoszenia $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Należy pamiętać, że tzw. przyspieszenie unoszenia jest dodatkowym przyspieszeniem, które występuje w złożonym ruchu cząsteczki.

W następnym podrozdziale będzie wykorzystywana pochodna materialna całki objętościowej. Dlatego też podane zostaną w tym miejscu stosowne zależności [2].

Jeżeli mamy całkę objętościową:

$$I = \int_V A dV \quad (1.13)$$

gdzie: $A = A(x_i, t)$ jest pewną własnością ośrodka ciągłego, to pochodną materialną tej całki obliczamy z wzoru:

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V A dV \right) = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV \quad (1.14)$$

gdzie:

$\frac{DA}{Dt}$ – pochodna materialna funkcji $A(x_i, t)$,

v_j – wektor prędkości.

Zgodnie z (1.11) mamy:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

Uwzględniając (1.15) w (1.14), otrzymujemy zależność, która pozwala na obliczenie pochodnej materialnej całki objętościowej:

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V A dV \right) = \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (A v_j) \right] \quad (1.16)$$

Zależności (1.16) zostaną wykorzystane do wyprowadzenia wzorów na warunki równowagi ośrodków ciągłych.

1.4. Rodzaje sił działających na ciało

Na każde ciało materialne działają dwa rodzaje sił:

- 1) siły masowe, które działają na każdy element objętości ciała,
- 2) siły powierzchniowe (naprężenia) działające na elementy powierzchni ciała.

Siły masowe wynikają z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$F = ma \quad (1.17)$$

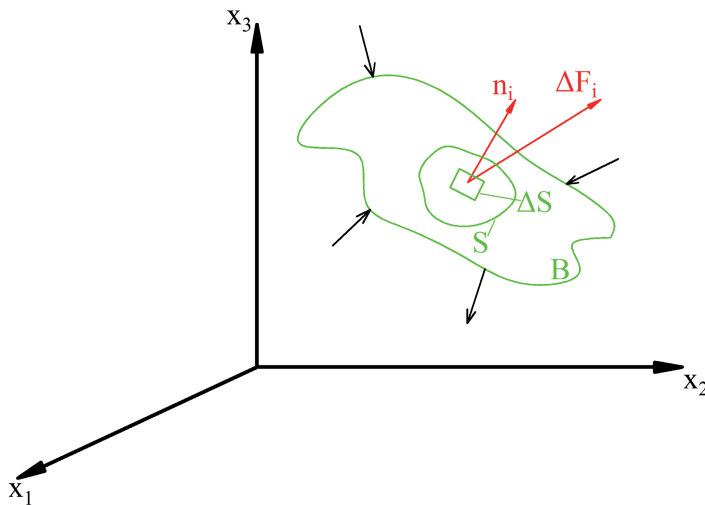
gdzie:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

2. Stan naprężenia

2.1. Opis stanu naprężenia w punkcie

Na rysunku 2.1 pokazano ciało B obciążone siłami zewnętrznymi (nieoznaczone strzałki oznaczające umownie siły zewnętrzne). Zakładamy, że wewnątrz ciała istnieje powierzchnia zamknięta (S). Wybieramy nieskończenie mały element tej powierzchni (ΔS), którego orientację opisuje jednostkowy wektor normalny (n_i).



Rys. 2.1. Ciało obciążone siłami zewnętrznymi (\longrightarrow oznaczają siły zewnętrzne)

Należy w tym miejscu wyjaśnić, że pod pojęciem jednostkowego wektora normalnego rozumiemy wektor o długości równej jedności, co zapisać można zależnością:

$$n_i n_i = 1 \quad (2.1)$$

czyli:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.1a)$$

Wektor n_i określa orientację powierzchni ΔS , a jego składowe (n_1, n_2, n_3) są wprost cosinusami kierunkowymi tego wektora.

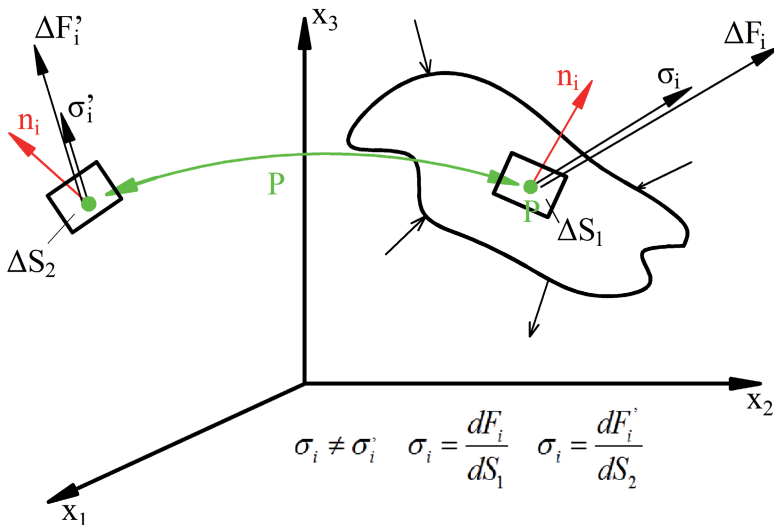
Zasada naprężeń Eulera–Cauchy’go mówi, że na dowolnej, myślowo poprowadzonej powierzchni zamkniętej S dowolnego ciała istnieje wektorowe pole naprężeń, którego działanie na materiał leżący wewnątrz S jest równoznaczne z oddziaływaniem przyległego materiału zewnętrznego [2].

Siła ΔF_i (rys. 2.1) jest funkcją pola elementu ΔS oraz jego orientacji (n_i) na powierzchni S . Jeżeli założymy, że ΔS zmierza do zera, to granica ilorazu $\frac{\Delta F_i}{\Delta S}$ będzie zmierzająca do skończonej granicy $\frac{dF_i}{dS}$. Tę skończoną granicę nazywac będziemy naprężeniem (wektorem naprężenia) i możemy zapisać zależnością:

$$\sigma_i = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S} = \frac{dF_i}{dS} \quad (2.2)$$

Wektor naprężenia σ_i ma kierunek siły ΔF_i oraz trzy składowe ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) w przyjętym układzie odniesienia.

Należy pamiętać, że siła ΔF_i jest m.in. funkcją orientacji elementów ΔS , czyli jest uzależniona od n_i . Oznacza to, że jeżeli przez wybrany punkt P leżący wewnątrz ciała poprowadzimy dwie płaszczyzny o określonej orientacji (rys. 2.2), to otrzymamy dwa różne pod względem wartości i kierunku wektory naprężenia σ_i ($\sigma_i \neq \sigma'_i$). Siła ΔF_i (rys. 2.1) jest uzależniona od orientacji elementu ΔS , a co za tym idzie, od orientacji elementu ΔS jest uzależniony kierunek i długość wektora σ_i . Dowód tego twierdzenia zostanie przeprowadzony w podrozdziale 2.9.1, w którym omawiac będziemy elipsoidę naprężeń Lamégo.



Rys. 2.2. Wektory naprężenia σ_i w punkcie P (ciała obciążonego siłami zewnętrznymi) na dwóch różnie zorientowanych płaszczyznach przechodzących przez ten sam punkt P

Tak więc każdej płaszczyźnie przechodzącej przez punkt P (rys. 2.2) odpowiada inny wektor naprężenia σ_i . Do opisu stanu naprężenia w punkcie P obciążonego ciała (przy danej orientacji układu odniesienia) musimy więc znać sześć wielkości:

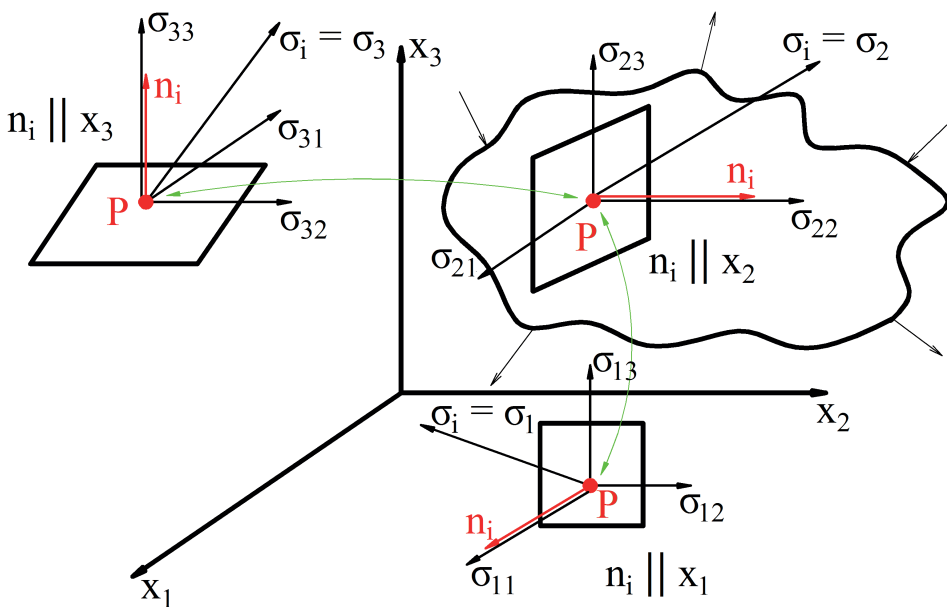
- trzy składowe orientacji płaszczyzny przechodzącej przez ten punkt (n_1, n_2, n_3),
- trzy składowe wektora naprężenia σ_i ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

Należy pamiętać, że wektor naprężenia σ_i jest ściśle związany z określoną płaszczyzną. Jeżeli więc nie znamy orientacji płaszczyzny, a podany jest jedynie wektor σ_i , to nie można powiedzieć o stanie naprężenia w punkcie, gdyż informacja jest niepełna.

Opis stanu naprężenia w punkcie ciała za pomocą wektora naprężenia σ_i nie jest korzystny, gdyż wymaga każdorazowo (dla danej orientacji układu odniesienia) znajomości orientacji płaszczyzny (przekroju), na której wektor σ_i występuje. Dlatego też w mechanice ośrodków ciągłych stosuje się najczęściej opis stanu naprężenia w punkcie ciała za pomocą tensora naprężenia (σ_{ij}). W takim opisie przyjmujemy następujący tok postępowania.

Przez dany punkt P ciała (rys. 2.3) prowadzimy trzy płaszczyzny odpowiednio prostopadłe do osi układu odniesienia. Na każdej z tych płaszczyzn wystąpi wektor naprężenia σ_i , przy czym indeks i przyjmuje wartości: 1, 2, 3, które bezpośrednio wskazują, do której osi układu odniesienia płaszczyzna danego wektora σ_i jest prostopadła.

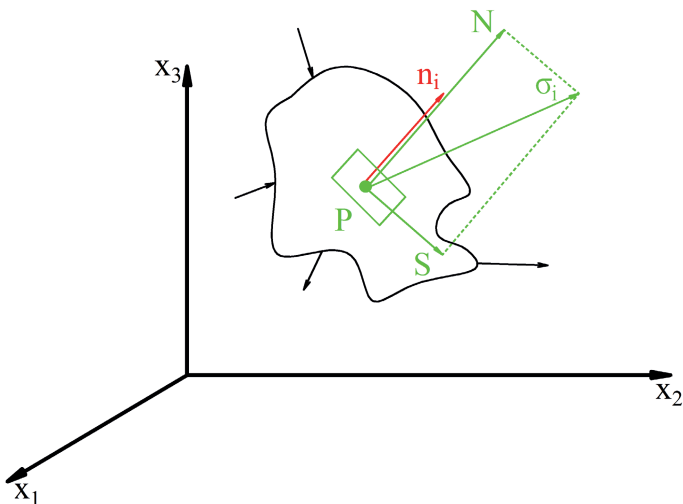
I tak, na płaszczyźnie prostopadłej do osi x_1 mamy $\sigma_i = \sigma_1$; na płaszczyźnie prostopadłej do x_2 mamy $\sigma_i = \sigma_2$, a na płaszczyźnie prostopadłej do x_3 występuje $\sigma_i = \sigma_3$ (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Wektory naprężenia σ_i występujące na trzech płaszczyznach przechodzących przez ten sam punkt P i równoległych do trzech płaszczyzn przyjętego układu odniesienia

2.4. Naprężenia główne i kierunki ich działania

Jeżeli przez dowolny punkt obciążonego ciała poprowadzimy dowolnie zorientowaną płaszczyznę (rys. 2.8), to wektor naprężenia σ_i w tym punkcie nie będzie (w ogólnym przypadku) prostopadły do tej płaszczyzny.



Rys. 2.8. Wektor naprężenia σ_i na płaszczyźnie dowolnie nachylonej

Orientację wektora σ_i można znaleźć na podstawie zależności (2.10). Ponieważ σ_i nie jest, w ogólnym przypadku, prostopadły do płaszczyzny działania, to możemy go rozłożyć na składową normalną (N) oraz składową styczną (S):

$$N^2 + S^2 = \sigma_i \sigma_i \quad (2.43)$$

Składową normalną (N) można znaleźć jako sumę rzutów składowych wektora σ_i na kierunek normalnej do płaszczyzny (kierunek n_i):

$$N = \sigma_i n_i \quad (2.44)$$

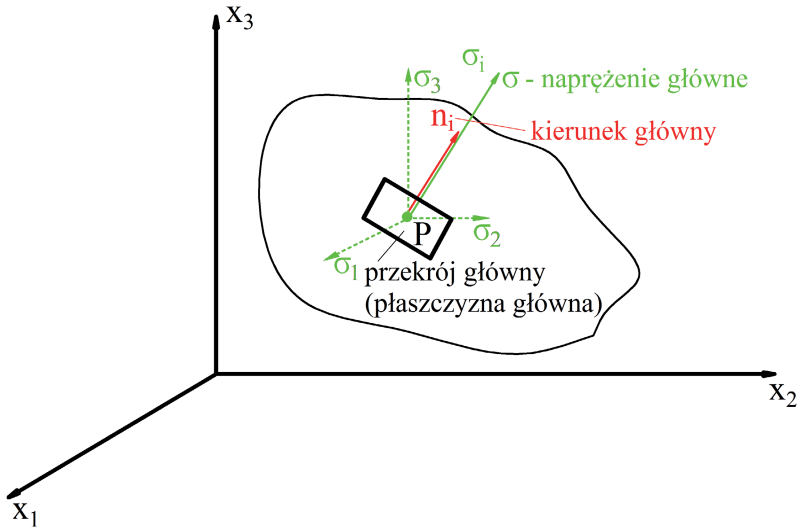
gdzie: n_i – jednostkowy wektor normalny do płaszczyzny.

Korzystając z równania Cauchy'ego (równanie (2.6)), otrzymamy ogólny wzór na składową normalną wektora naprężenia:

$$N = n_i n_j \sigma_{ji} \quad (2.45)$$

Można w tym miejscu zadać pytanie, jak powinna być zorientowana płaszczyzna w danym punkcie ciała, aby wektor naprężenia na niej występujący był do tej płaszczyzny prostopadły (normalny). Taka właśnie sytuacja została pokazana na rysunku 2.9, gdzie wektor naprężenia σ jest prostopadły do płaszczyzny działania.

Takie naprężenia, które są prostopadłe do płaszczyzny działania, nazywać będziemy naprężeniami głównymi, a kierunki ich działania – kierunkami głównymi. Płaszczyzny działania naprężeń głównych nazywać będziemy przekrojami (płaszczyznami) głównymi. Z podanej definicji naprężeń głównych wynika, że są to naprężenia, które nie mają składowych stycznych, ze względu na fakt, iż są prostopadłe do płaszczyzny działania.



Rys. 2.9. Naprężenie główne występujące w płaszczyźnie głównej

Przyjmijmy, że σ pokazane na rysunku 2.9 oznacza długość wektora naprężenia głównego. Składowe tego wektora (σ_1 , σ_2 , σ_3) wyznaczamy jako rzuty jego długości na kierunki osi układu odniesienia, co można zapisać jako:

$$\sigma_i = \sigma n_i \quad (2.46)$$

Korzystamy z równania Cauchy'ego (2.6):

$$\sigma_i = \sigma_{ji} n_j$$

Porównując stronami (2.46) i (2.6), otrzymujemy:

$$\sigma n_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.47)$$

W równaniu (2.47) występuje n_i oraz n_j , a jest to ten sam kierunek główny. Wykorzystujemy deltę Kroneckera (jako macierz zastępowania):

$$n_i = \delta_{ij} n_j \quad (2.48)$$

Wstawiając (2.48) do (2.47), mamy:

$$\sigma n_j \delta_{ij} = \sigma_{ji} n_j \quad (2.49)$$

Wykorzystujemy symetrię tensora naprężenia ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) i otrzymujemy:

$$n_j(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = 0 \quad (2.50)$$

gdzie:

σ_{ij} – znany tensor naprężenia,
 σ – poszukiwane naprężenie główne,
 n_j – poszukiwany kierunek główny.

Przedstawiamy (2.50) w pełnej postaci korzystając z umowy sumacyjnej:

$$\left. \begin{aligned} n_j(\sigma_{1j} - \sigma\delta_{1j}) &= 0 & \text{dla } i = 1 \\ n_j(\sigma_{2j} - \sigma\delta_{2j}) &= 0 & \text{dla } i = 2 \\ n_j(\sigma_{3j} - \sigma\delta_{3j}) &= 0 & \text{dla } i = 3 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Rozwijając (2.51), otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0 \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

W układzie liniowych równań jednorodnych (2.52) występują cztery niewiadome (n_1, n_2, n_3, σ). Aby układ równań (2.52) posiadał rozwiązanie, wprowadzamy dodatkowe, czwarte równanie, które jest wcześniej poznanym warunkiem geometrycznym (2.1):

$$\left. \begin{aligned} n_j n_j &= 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Układ równań jednorodnych (2.52) posiada niezerowe rozwiązanie tylko wówczas, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych (jako niewiadome traktujemy w tym momencie: n_1, n_2, n_3) jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

lub inaczej:

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \quad (2.53a)$$

W wyniku rozwiązania wyznacznika (2.53) otrzymujemy równanie trzeciego stopnia, w którym niewiadomą jest poszukiwane naprężenie główne (σ).

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (2.54)$$

gdzie:

σ – poszukiwane naprężenie główne,
 I_1, I_2, I_3 – niezmienniki stanu naprężenia, których wartości wynikają z rozwiązania (2.53).

Niezmiennikami stanu naprężenia (inwariantami) nazywamy wyrażenia algebraiczne, utworzone z wyrazów tensora naprężenia, które nie zmieniają swych wartości przy transformacjach układu odniesienia.

Wartości niezmienników stanu naprężenia można łatwo obliczyć, gdy znamy składowe tensora naprężenia (σ_{ij}), którymi są:

- niezmiennik liniowy I_1 :

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{const} \quad (2.55a)$$

- niezmiennik kwadratowy I_2 :

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \text{const} \quad (2.55b)$$

- niezmiennik sześcienny I_3 :

$$I_3 = \left| \sigma_{ij} \right| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \text{const} \quad (2.55c)$$

Jeżeli składowe tensora σ_{ij} są liczbami rzeczywistymi, to rozwiązanie równania (2.54) zawsze istnieje w zakresie liczb rzeczywistych. Tym rozwiązaniem są poszukiwane naprężenia główne, które oznaczать będziemy symbolami: $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$.

W literaturze stosuje się często inne oznaczenie naprężeń głównych, a mianowicie: σ_1 , σ_2 , σ_3 , co jest jednak mylące dla czytelnika, gdyż przez σ_1 , σ_2 , σ_3 rozumiemy najczęściej składowe dowolnego wektora naprężenia σ_r .

Zgodnie z powszechnie stosowaną w literaturze umową pierwiastki równania (2.54) porządkujemy w taki sposób, aby spełniały nierówność:

$$\sigma_{(1)} \geq \sigma_{(2)} \geq \sigma_{(3)} \quad (2.56)$$

Naprężenia główne są wzajemnie ortogonalne (dowód pomijamy) i tworzą tensor naprężeń głównych, który w sposób jednoznaczny opisuje stan naprężenia w punkcie ciała:

$$\sigma_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Jest oczywiste, że w macierzy (2.57) nie występują naprężenia styczne. Tak więc do opisu stanu naprężenia w punkcie wystarczy podać trzy składowe tensora naprężeń głównych ($\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$), które możemy wyznaczyć dla dowolnego tensora σ_{ij} , rozwiązując równanie (2.54). Ogólna metoda rozwiązywania równań trzeciego stopnia została podana w podrozdziale 1.5.1.

Wracając do problemu porównywania stanów naprężeń w dowolnym punkcie ciała, widzimy, że obliczając wartości σ_H z zależności (2.103) lub (2.109), otrzymujemy liczby (wartości naprężeń), które łatwo można ze sobą porównać, a tym samym możemy ocenić, który stan naprężenia powoduje większe wyczerpanie materiału.

2.9. Geometryczna interpretacja stanów naprężenia

2.9.1. Elipsoida Lamégo

Wyznaczenie elipsoidy Lamégo jest jednym z najstarszych sposobów geometrycznej interpretacji stanu naprężenia w punkcie. Jako pierwszy jej istnienie stwierdził Gabriel Lamé. W latach 1820–1830 wykonał on liczne doświadczenia i analizy, które doprowadziły do stwierdzenia istnienia tzw. elipsoidy naprężeń.

Weźmy pod uwagę dowolny punkt wewnątrz obciążonego ciała, w którym to punkcie znamy składowe tensora naprężeń głównych. Jeżeli przez ten punkt poprowadzimy dowolnie nachyloną płaszczyznę, to wystąpi na niej wektor naprężenia σ_p , którego składowe możemy obliczyć z wzoru Cauchy'ego danego zależnością (2.6):

$$\sigma_i = n_j \sigma_{ji}$$

Wykorzystując wcześniej podane zależności (2.9) i (2.10), możemy znaleźć długość wektora σ_i oraz jego orientację w przyjętym układzie odniesienia.

Można zadać następujące pytanie: jaką powierzchnię opisze koniec wektora σ_p , jeżeli w sposób ciągły będziemy zmieniać orientację płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt (w którym znamy naprężenia główne: $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$). Ciągła zmiana orientacji płaszczyzny oznacza ciągłą zmianę składowych jednostkowego wektora normalnego do płaszczyzny (n_i).

Na podstawie równań (2.59), które wynikają z równania Cauchy'ego (2.6), znamy składowe wektora σ_i na płaszczyźnie dowolnie nachylonej, gdy stan naprężenia opisany jest naprężeniami głównymi: $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{(1)} n_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_{(2)} n_2 \\ \sigma_3 &= \sigma_{(3)} n_3 \end{aligned} \right\}$$

Z równań (2.59) obliczamy składowe n_i :

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_{(1)}} \\ n_2 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_{(2)}} \\ n_3 &= \frac{\sigma_3}{\sigma_{(3)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Następnie składowe n_i wstawiamy do związku (2.1a):

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

i w efekcie otrzymujemy:

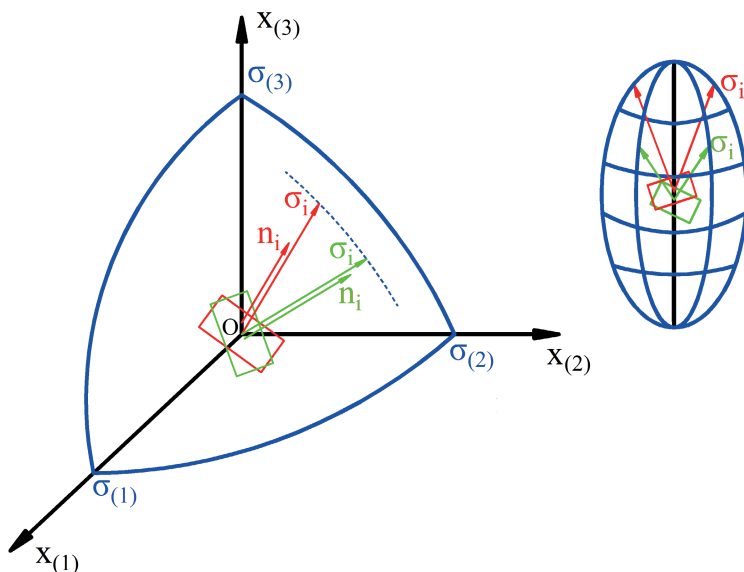
$$\frac{\sigma_1^2}{[\sigma_{(1)}]^2} + \frac{\sigma_2^2}{[\sigma_{(2)}]^2} + \frac{\sigma_3^2}{[\sigma_{(3)}]^2} = 1 \quad (2.110)$$

Równanie (2.110) przedstawia elipsoidę trójosiową w kartezjańskim układzie odniesienia, gdzie na trzech osiach układu mamy wartości naprężeń głównych występujące w danym punkcie ciała.

Elipsoidę naprężeń pokazaną na rysunku 2.16 nazywamy elipsoidą Lamégo. Jeżeli półosie elipsoidy Lamégo potraktujemy jako bezwzględne wartości naprężeń głównych ($\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$), to trzy niezmienniki stanu naprężenia (I_1 , I_2 , I_3) można zinterpretować następująco:

- I_1 jest sumą trzech półosi elipsoidy naprężeń,
- I_2 jest proporcjonalny do sumy trzech pól przekrojów głównych elipsoidy naprężeń,
- I_3 jest proporcjonalny do objętości elipsoidy.

W podsumowaniu można podać następującą odpowiedź na postawione wcześniej pytanie. Jeżeli w sposób ciągły zmieniamy będziemy orientację płaszczyzny przechodzącej przez punkt ciała, w którym znamy składowe naprężeń głównych, to koniec wektora naprężenia σ_i , występującego na tych płaszczyznach, zakreśli elipsoidę trójosiową opisaną równaniem (2.110).



Rys. 2.16. Elipsoida naprężeń Lamégo jako miejsce geometryczne punktów wyznaczonych przez koniec wektora naprężenia σ_i przy ciągłej zmianie orientacji płaszczyzny

2.9.2. Kwadryki naprężeń Cauchy'ego

Pojęcie „kwadryka” jest obecnie rzadko używane w matematyce. Kwadryka oznacza nazwę pięciu powierzchni drugiego stopnia: elipsoidy, hiperboloidy jedno- i dwupowłokowej, paraboloidy eliptycznej i hiperbolicznej. Tak więc kwadryka naprężeń Cauchy'ego jest geometryczną interpretacją stanów naprężenia z wykorzystaniem wyżej wymienionych powierzchni drugiego stopnia.

Rozpatrzmy równanie:

$$S_{ij}x_i x_j = 1 \quad (2.111)$$

gdzie:

S_{ij} – dziewięć dowolnych współczynników liczbowych,
 x_i, x_j – współrzędne punktu.

Wykonując sumowanie względem i oraz j , z równania (2.111) otrzymamy:

$$\begin{aligned} S_{11}x_1^2 + S_{12}x_1x_2 + S_{13}x_1x_3 + S_{21}x_2x_1 + S_{22}x_2^2 + \\ + S_{23}x_2x_3 + S_{31}x_3x_1 + S_{32}x_3x_2 + S_{33}x_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Jeżeli przyjmiemy założenie, że współczynniki S_{ij} spełniają warunek $S_{ij} = S_{ji}$, to z równania (2.112) otrzymamy:

$$S_{11}x_1^2 + S_{22}x_2^2 + S_{33}x_3^2 + 2S_{23}x_2x_3 + 2S_{31}x_3x_1 + 2S_{12}x_1x_2 = 1 \quad (2.113)$$

Równanie (2.113) jest ogólnym równaniem powierzchni drugiego stopnia, czyli kwadryki, gdy początek układu odniesienia leży w jej środku.

Można łatwo wykazać, że współczynniki S'_{ij} , a więc współczynniki występujące w zależności (2.113), transformują się zgodnie z zależnością:

$$S'_{ij} = a_{ik}a_{jl}S_{kl} \quad (2.114)$$

a więc tak samo jak tensory drugiego rzędu. Teoria transformacji tensora drugiego rzędu jest więc taka sama jak teoria transformacji kwadryki. Biorąc pod uwagę ważność wzorów transformacyjnych, należy stwierdzić, że do opisu tensora symetrycznego drugiego rzędu możemy wykorzystać geometryczną interpretację tego tensora w postaci kwadryki. Taką geometryczną interpretację możemy zastosować do opisu dowolnej wielkości fizycznej, którą opisuje tensor drugiego rzędu.

Cauchy w miejsce dziewięciu dowolnych współczynników S_{ij} wprowadził składowe tensora naprężenia σ_{ij} i zaproponował ogólne równanie kwadryki naprężeń w postaci:

$$\sigma_{ij}x_i x_j = \pm k^2 \quad (2.115)$$

gdzie:

σ_{ij} – tensor naprężenia,
 x_i, x_j – współrzędne punktu,
 k^2 – wielkość stała, przy czym znak przy k^2 musi być tak dobrany, aby równanie (2.115) przedstawiało powierzchnię rzeczywistą.

Jeżeli do dalszych rozważań przyjmiemy tensor naprężeń głównych, to z zależności (2.115) otrzymamy:

$$\sigma_{(1)}x_1^2 + \sigma_{(2)}x_2^2 + \sigma_{(3)}x_3^2 = \pm k^2 \quad (2.116)$$

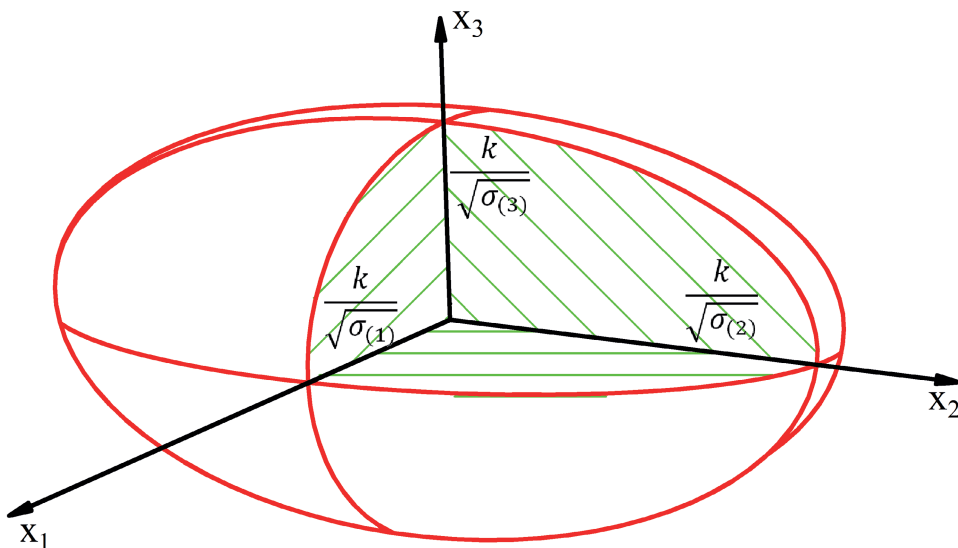
gdzie: $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$ są naprężeniami głównymi.

Zależność (2.116) przedstawia kwadrykę, której współczynniki są naprężeniami głównymi. Pamiętajmy, że naprężenia główne spełniają umowy warunek (2.56):

$$\sigma_{(1)} \geq \sigma_{(2)} \geq \sigma_{(3)}$$

Z równania (2.116) i z zależności (2.56) wynika, że kwadryka naprężeń Cauchy'ego może być jedną z niżej podanych powierzchni drugiego stopnia.

Elipsoida trójosiowa – jeżeli $\sigma_{(1)} \geq \sigma_{(2)} \geq \sigma_{(3)} > 0$, to w takim przypadku przyjmujemy przy stałej k znak plus ($+k^2$), jeżeli $0 > \sigma_{(1)} \geq \sigma_{(2)} \geq \sigma_{(3)}$, to w takim przypadku przyjmujemy przy stałej k znak minus ($-k^2$).



Rys. 2.17. Kwadryka naprężeń Cauchy'ego jako elipsoida trójosiowa

Z równania (2.116) wynika (co pokazano na rysunku 2.17), że półosie elipsoidy są równe:

$$\frac{k}{\sqrt{\sigma_{(1)}}}; \frac{k}{\sqrt{\sigma_{(2)}}}; \frac{k}{\sqrt{\sigma_{(3)}}}$$

Elipsoida obrotowa – jeżeli dwa naprężenia główne są sobie równe: $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)}$ lub $\sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ lub $\sigma_{(1)} = \sigma_{(3)}$. Znak przy stałej k przyjmujemy analogicznie jak w przypadku pierwszym.

Kula – jeżeli wszystkie naprężenia główne są sobie równe, a więc mamy do czynienia z hydrostatycznym stanem naprężenia:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$$

Dla tego przypadku znak przy stałej k przyjmujemy analogicznie jak w przypadku pierwszym.

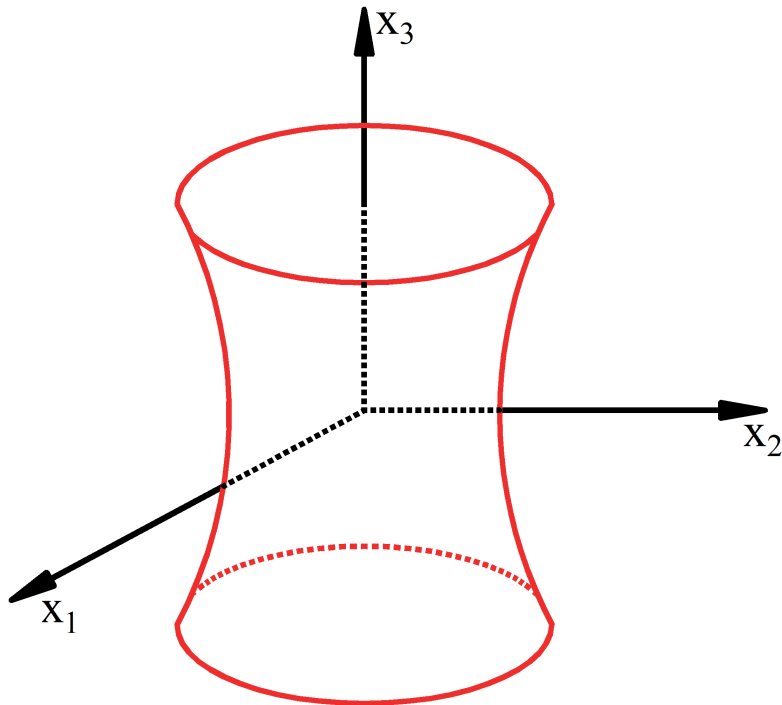
Hiperboloida jednowłokowa – jeżeli dwa naprężenia główne są dodatnie, a jedno ujemne:

$$\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > 0; \sigma_{(3)} < 0$$

Znak przy stałej k będzie dodatni.

Hiperboloida dwuwłokowa – jeżeli dwa naprężenia główne są ujemne, a jedno jest dodatnie. Znak przy stałej k będzie dodatni.

Należy pamiętać, że osie układów odniesienia na rysunkach 2.17–2.19 odpowiadają kierunkom głównym, czyli kierunkom działania naprężeń głównych.

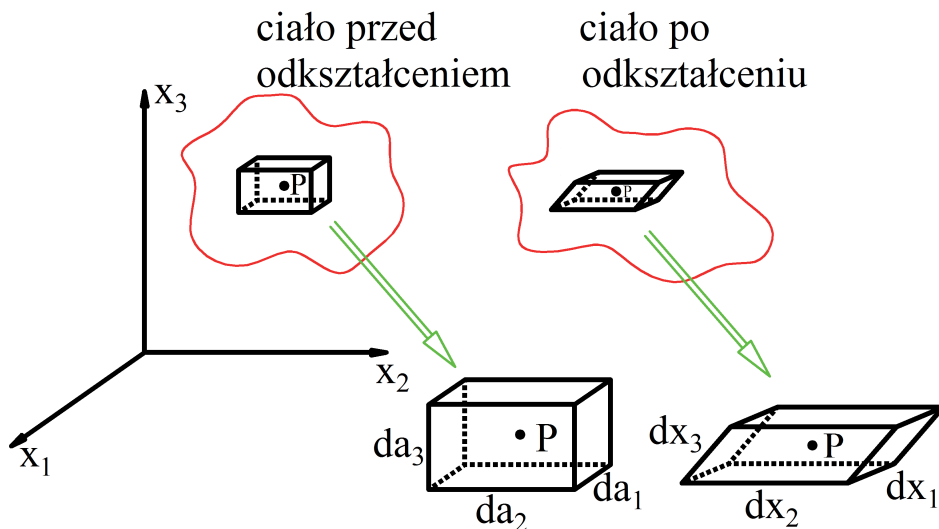


$$\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > 0; \sigma_{(3)} < 0 \quad \text{stała: } (+k^2)$$

Rys. 2.18. Kwadryka naprężeń Cauchy'ego jako hiperboloida jednowłokowa

Jak wykazane będzie w dalszych rozdziałach, zależności określające stan odkształcenia w otoczeniu punktu ciała są równaniami różniczkowymi nieliniowymi. Założenie bardzo małych odkształceń, którym towarzyszą bardzo małe przemieszczenia, pozwala na pominięcie pochodnych cząstkowych wyższych rzędów, co prowadzi do uzyskania liniowych równań różniczkowych.

Aby opisać stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała, należy znaleźć zmiany geometryczne, którym podlega nieskończenie mały prostopadłościan zawierający ten punkt (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Schemat odkształcenia ciała

Na rysunku 3.1 pokazano zmianę kształtu elementarnego prostopadłościanu o krawędziach da_1 , da_2 , da_3 , otaczającego punkt P we wnętrzu odkształcanego ciała. Prostopadłościan ten (przy przyjęciu odkształcenia jednorodnego w obrębie nieskończenie małego obszaru) zmienia się w wyniku odkształcenia w elementarny równoległobok o krawędziach dx_1 , dx_2 , dx_3 . Aby opisać zmiany geometryczne elementarnego prostopadłościanu, należy określić sześć wielkości:

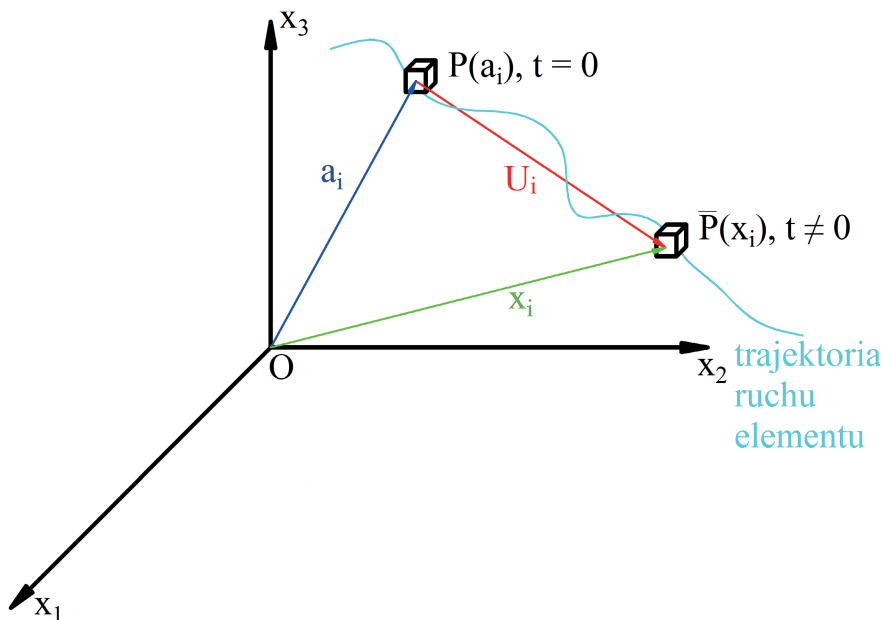
- zmiany długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka,
- zmiany kątów pomiędzy tymi krawędziami.

Wymienione wielkości opisują jednoznacznie stan odkształcenia w punkcie ciała.

3.1. Opis przemieszczenia sposobem Lagrange'a oraz Eulera

Elementarny prostopadłościan otaczający dowolny punkt w odkształcanym ciele zmienia w trakcie odkształcenia położenie wzdłuż pewnej linii przestrzennej. Wektory przemieszczenia, łączące kolejne położenia tego elementu, są funkcją czasu i mogą być opisane sposobem

Lagrange'a lub Eulera. Na rysunku 3.2 pokazano przykładową trajektorię ruchu elementarnego prostopadłościanu oraz wektor przemieszczenia łączący dwa kolejne jego położenia.



Rys. 3.2. Trajektorja ruchu elementarnego prostopadłościanu i wektor przemieszczenia. Objasnienia: a_i – współrzędne początkowe ($t = 0$), x_i – współrzędne chwilowe ($t \neq 0$)

Wprowadzamy następujące oznaczenia dla współrzędnych położenia elementu objętościowego:

- a_i – wektor położenia początkowego ($t = 0$),
- x_i – wektor położenia chwilowego ($t \neq 0$).

Położenie chwilowe elementu może być określone jako funkcja jego współrzędnych początkowych oraz czasu:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (3.1)$$

Taki sposób opisu ruchu, w którym położenie dowolnej cząsteczki jest określone za pomocą jej położenia początkowego i czasu (zgodnie z zależnością (3.1), nazywamy zapisem ruchu Lagrange'a. Wektor przemieszczenia dowolnej cząsteczki jest wektorem łączącym dwa kolejne położenia tej cząsteczki i zgodnie z rysunkiem 3.2 jego składowe obliczamy z zależności:

$$U_i = x_i - a_i \quad (3.2)$$

Ponieważ w zapisie Lagrange'a x_i jest funkcją położenia początkowego a_i oraz czasu (zgodnie z (3.1)), więc i wektor przemieszczenia w zapisie Lagrange'a będzie funkcją a_i oraz t :

$$U_i = U_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (3.3)$$

W opisie ruchu sposobem Eulera wykorzystujemy funkcję odwrotną w stosunku do zależności (3.1), tzn. położenie początkowe elementu a_i traktujemy jako funkcję położenia chwilowego x_i oraz czasu:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.4)$$

Z wyrażeń (3.4) i (3.2) wynika, że przemieszczenie U_i jest funkcją położenia chwilowego i czasu:

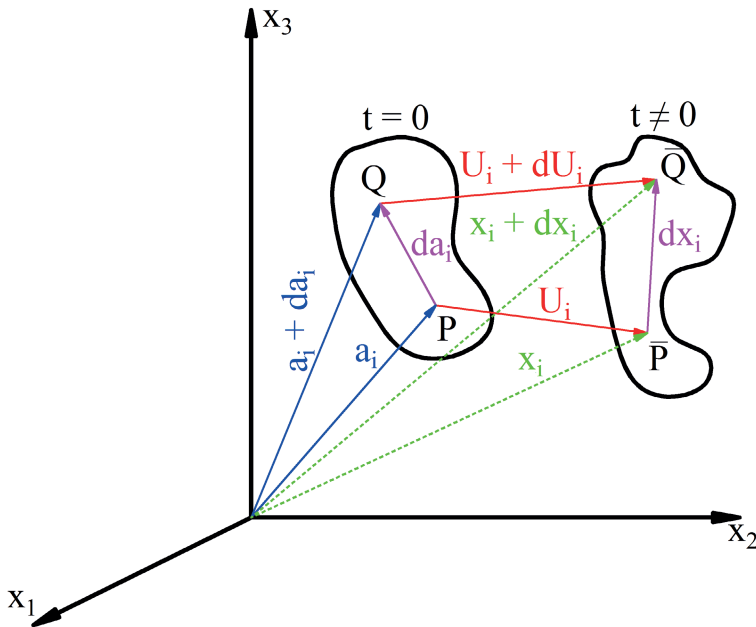
$$U_i = U_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.5)$$

Taki sposób opisu ruchu, w którym położenie dowolnej cząsteczki jest określone za pomocą jej położenia chwilowego i czasu, nazywamy zapisem ruchu Eulera.

Dwa różniące się sposoby opisu ruchu powodują wystąpienie dwóch różnych opisów stanu odkształcenia w punkcie ciała. Będziemy mieli do czynienia z tensorami odkształcenia w zapisie Lagrange'a i z tensorami odkształcenia w zapisie Eulera.

3.2. Tensor odkształceń skończonych w zapisie Lagrange'a

Bierzemy pod uwagę poruszające się ciało i dwa punkty (P oraz Q) leżące bardzo blisko siebie wewnątrz tego ciała (rys. 3.3). Zakładamy również, że ciało to ulega odkształceniu, a więc odległość pomiędzy punktami P i Q musi ulegać zmianie.



Rys. 3.3. Nieskończenie mały odcinek PQ wewnątrz poruszającego się i odkształcanego ciała. Objasnienia w tekście

3.3. Tensor odkształceń skończonych w zapisie Eulera

Bierzemy pod uwagę przemieszczające się w przestrzeni ciało pokazane na rysunku 3.3. Postępujemy identycznie jak w podrozdziale 3.2. W postępowaniu tym zastosujemy jednak opis przemieszczania według Eulera, zgodnie z którym przemieszczenie U_i jest funkcją położenia chwilowego zgodnie z zależnością (3.5):

$$U_i = U_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

Wykorzystujemy zależność (3.2), z której wynika:

$$a_i = x_i - U_i \quad (3.32)$$

Szukamy różnicy kwadratów długości wektorów \overline{PQ} oraz PQ pokazanych na rysunku 3.3. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy:

$$(dx)^2 - (da)^2 = dx_i dx_i - da_i da_i$$

Różniczki zupełne dx_i oraz da_i obliczamy dla położenia chwilowego:

$$dx_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (3.33)$$

$$da_i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (3.34)$$

Podstawiamy (3.34) oraz (3.35) do (3.8) oraz dokonujemy zmiany wskaźników przy a na wskaźnik r (identycznie jak w podrozdziale 3.2). W efekcie otrzymamy zależność:

$$(dx)^2 - (da)^2 = \left[\delta_{ij} - \frac{\partial a_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \quad (3.35)$$

Wektor położenia początkowego a_r można zapisać (na podstawie (3.32)) w postaci:

$$a_r = x_r - U_r \quad (3.36)$$

Wstawiamy (3.36) do (3.35), obliczamy pochodne cząstkowe i wykorzystujemy własności delty Kroneckera (opisane w podrozdziałach 1.5.5 oraz 3.2) W efekcie otrzymamy:

$$(dx)^2 - (da)^2 = \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \quad (3.37)$$

Jeżeli ciało porusza się jak bryła sztywna, to odległości pomiędzy dowolnie wybranymi punktami wewnątrz ciała nie ulegają zmianie. Wynika stąd, że długość dowolnego odcinka \overline{PQ} w chwili $t \neq 0$ jest równa długości odcinka PQ w chwili $t = 0$, a zatem $dx = da$. Różnica kwadratów długości odcinków: $(dx)^2 - (da)^2$ jest równa zero. Z zależności (3.37) wynika

więc, że gdy ciało porusza się jak bryła sztywna, to wektorowe pole przemieszczeń tego ciała musi spełniać równanie:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial x_j} = 0 \quad (3.38)$$

Jeżeli ciało ulega odkształceniu, to odległości pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi punktami wewnątrz ciała ulegają zmianie, a w konsekwencji – na podstawie równania (3.37), różnica kwadratów długości odcinków: $(dx)^2 - (da)^2$ jest różna od zera. Różna od zera musi być również prawa strona równania (3.37). Wyrażenie w nawiasie kwadratowym w równaniu (3.37) jest więc miarą odkształcenia i opisuje podwojony tensor odkształceń skończonych w zapisie Eulera (E_{ij}):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial x_j} \right] \quad (3.39)$$

gdzie:

- E_{ij} – tensor odkształceń skończonych w zapisie Eulera (w danym punkcie ciała),
- U_i – wektor przemieszczenia punktu (lub wektorowe pole przemieszczeń),
- x_i – wektor położenia chwilowego punktu.

Uwzględniając związek (3.39), możemy zapisać równanie (3.37) w postaci:

$$(dx)^2 - (da)^2 = 2E_{ij} dx_i dx_j \quad (3.40)$$

gdzie po lewej stronie występuje różnica kwadratów długości odcinków $\overline{P\overline{Q}}$ i PQ pokazanych na rysunku 3.3.

Tensor E_{ij} będziemy w skrócie nazywać tensorem odkształceń skończonych Eulera. Tensor E_{ij} , podobnie jak tensor L_{ij} , w sposób dokładny opisuje stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała dla odkształceń skończonych. Należy pamiętać, że odkształcenia skończone są to duże odkształcenia utożsamiane zwykle z odkształceniami plastycznymi (trwałymi).

Wyznaczając na podstawie (3.39) składowe tensora E_{ij} dla kilku przykładowych wartości i oraz j , otrzymamy:

1) dla $i = j = 1$

$$E_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (3.41)$$

2) dla $i = 1, j = 2$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \right] \quad (3.42)$$

4. Związki między naprężeniami i odkształceniami w stanie sprężystym

Siły powierzchniowe i masowe działające na ciało wywołują w tym ciele określony stan naprężenia, który opisać można za pomocą tensorowego pola naprężeń. Oznacza to, że w każdym punkcie ciała wyznaczyć można składowe tensora σ_{ij} , które są z kolei funkcją położenia, czyli $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_i)$.

Każdy stan naprężenia wywołuje w ciele określony stan odkształcenia, jako że w rzeczywistości nie występują ciała sztywne (aczkolwiek w teorii posługujemy się takim pojęciem). Generalnie odkształcenia podzielić można na dwa rodzaje:

- 1) odkształcenia sprężyste,
- 2) odkształcenia plastyczne.

Odształcenia sprężyste są odkształceniami nietrwałymi (odwracalnymi), co oznacza, że zanikają, gdy przestają działać siły (naprężenia) je wywołujące. Wówczas ciało powraca do poprzedniego kształtu i poprzednich wymiarów. Odształcenia sprężyste są typowe w urządzeniach, maszynach i konstrukcjach, gdzie niedopuszczalne jest występowanie odkształceń plastycznych.

Odształcenia plastyczne, zwane inaczej odkształceniami trwałymi, występują wówczas, gdy stan naprężenia przekroczy określoną wartość krytyczną i spowoduje nieodwracalne zmiany kształtów i wymiarów ciała. Odształcenia takie występują w typowych procesach przeróbki plastycznej metali, takich jak: walcowanie, kucie, ciągnięcie, tłoczenie, wyciskanie, w których na skutek trwałego, czyli plastycznego odkształcenia otrzymuje się wyroby o żądanych kształtach (pręty, kształtowniki, blachy, druty, odkuwki itp.).

Do opisu odkształceń sprężystych, w odniesieniu do typowych materiałów konstrukcyjnych, stosuje się najczęściej tensory nieskończone małych odkształceń: l_{ij} oraz e_{ij} . Do opisu odkształceń plastycznych, którym zawsze towarzyszą duże przemieszczenia (U_i), używa się zwykle tensorów odkształceń skończonych: L_{ij} oraz E_{ij} . W niektórych przypadkach, jak np. w procesach osiowosymetrycznych czy też w tzw. odkształceniach proporcjonalnych, można do opisu odkształceń plastycznych stosować tensory: l_{ij} oraz e_{ij} , o czym będzie mowa w następujących rozdziałach.

Ponieważ odkształcenia są wynikiem działania naprężeń rodzi się pytanie o zależności pomiędzy stanem odkształcenia a wywołującym go stanem naprężenia.

Związek taki jest powszechnie znany w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia, który występuje w statycznej próbie rozciągania (w obszarze odkształceń sprężystych). Jest to prawo Hooke'a, które zapisać można w postaci:

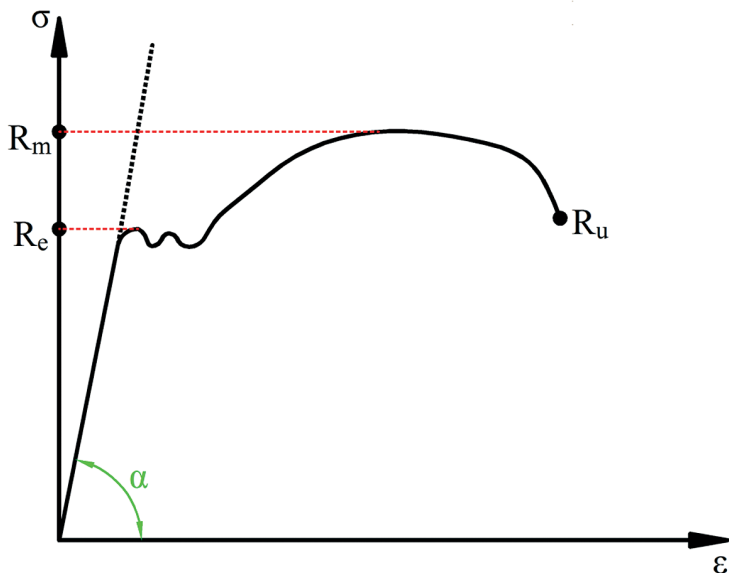
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.1)$$

gdzie:

σ – naprężenie w próbie rozciągania,

ε – względna zmiana długości próbki ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$),

E – moduł sprężystości wzdłużnej, zwany również modułem Younga.



Rys. 4.1. Umowny wykres rozciągania materiału wykazującego fizyczną granicę plastyczności

Na rysunku 4.1 zaprezentowano schematycznie wykres rozciągania materiału, który wykazuje fizyczną granicę plastyczności. Równanie (4.1) opisuje początkowy, prostoliniowy zakres wykresu rozciągania. Współczynnik kierunkowy tej prostej (E) jest wielkością fizyczną i nazywany jest modułem sprężystości wzdłużnej lub modułem Younga. Należy zaznaczyć, że przed osiągnięciem fizycznej granicy plastyczności (R_e) wykres przestaje być prostoliniowy, gdyż pojawiają się niewielkie odkształcenia plastyczne. Można przyjąć, że miejsce, w którym wykres rozciągania odchodzi od linii prostej danej równaniem (4.1), wyznacza koniec zakresu odkształceń sprężystych (rys. 4.1).

Aby odpowiedzieć na pytanie, jakie są związki pomiędzy stanem naprężeń a stanem odkształceń w zakresie odkształceń sprężystych, ciała należy podzielić na dwie grupy:

- 1) ciała anizotropowe sprężyste,
- 2) ciała izotropowe sprężyste.

Ciała anizotropowe sprężyste wykazują różne własności sprężyste w różnych kierunkach. Typowym przykładem takich ciał są monokryształy, w których w zależności od kierunku występują nie tylko różne własności sprężyste, lecz również występują różne własności mechaniczne i fizyczne (własności plastyczne, wytrzymałościowe, magnetyczne itp.) Anizotropowe własności wykazują również pojedyncze ziarna w mikrostrukturze metali i ich stopów. Takie pojedyncze ziarno traktować można jako mały kryształ, w którym w zależności od przyjętego kierunku krystalograficznego wystąpią różne wartości tej samej własności. Typowym przykładem ciał anizotropowych w skali makro są wyroby mające teksturę, np. teksturę powstałą w wyniku odkształcenia (walcowania, procesu ciągnięcia). W wyniku plastycznego płynięcia, na skutek anizotropii własności ziaren, następują obroty ziaren, towarzyszące ich odkształceniu. Określone kierunki krystalograficzne w ziarnach wykazują uprzywilejowaną orientację. Można powiedzieć, że w wyniku odkształcenia powstaje w strukturze materiału statystyczna przewaga orientacji określonego kierunku krystalograficznego. Przykładowo w ciągnionym drucie aluminiowym kierunek $\langle 111 \rangle$ będzie w większości ziaren równoległy do osi drutu [8]. Materiały wykazujące teksturę posiadają różne wartości tej samej własności w zależności od przyjętego kierunku. Własności: sprężyste, wytrzymałościowe i plastyczne, mierzone w kierunku walcowania (lub ciągnięcia, wyciskania), różnią się wyraźnie od tych samych własności wyznaczonych w kierunku prostopadłym do kierunku walcowania.

Materiały o określonej strukturze krystalograficznej, a więc większość znanych stopów metali, wykazują izotropię własności, gdy ziarna są rozłożone w sposób przypadkowy, tzn. gdy nie wystąpi uprzywilejowanie określonego kierunku krystalograficznego. Taki rozkład ziaren w strukturze wystąpi np. w przypadku materiałów odpowiednio wyżarzonych po procesie odkształcenia plastycznego na zimno.

4.1. Ciała anizotropowe sprężyste

Augustin Louis Cauchy uogólnił prawo Hooke'a, stwierdzając, że w przypadku ciał anizotropowych sprężyste składowe stanu naprężenia są liniowo zależne od składowych stanu odkształcenia. Oznacza to, że każda składowa stanu naprężenia jest liniową funkcją wszystkich składowych stanu odkształcenia. Biorąc pod uwagę tensor odkształceń nieskończenie małych Lagrange'a, uogólnienie Cauchy'ego można zapisać w postaci zależności:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} l_{kl} \quad (4.2)$$

gdzie:

- σ_{ij} – tensor naprężenia,
- l_{kl} – tensor odkształceń nieskończenie małych Lagrange'a,
- C_{ijkl} – tensor stałych sprężystości (tensor modułów sprężystości).

Przykładowo z zależności (4.2) wynika, że składowa σ_{11} tensora naprężenia opisana jest równaniem:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & C_{1111} l_{11} + C_{1112} l_{12} + C_{1113} l_{13} + C_{1121} l_{21} + C_{1122} l_{22} + \\ & + C_{1123} l_{23} + C_{1131} l_{31} + C_{1132} l_{32} + C_{1133} l_{33} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Jak widzimy, równanie (4.2) zastępuje dziewięć równań typu (4.3), z których każde ma po prawej stronie dziewięć wyrazów.

Ponieważ mamy dziewięć kombinacji wskaźników i, j oraz dziewięć kombinacji wskaźników k, l , więc tensor C_{ijkl} reprezentuje w ogólnym przypadku 81 stałych sprężystości materiału. Tensor stałych sprężystości (C_{ijkl}) jest tensorem czwartego rzędu i podlega prawu transformacji zgodnie z zależnością (1.4d).

Liczba niezależnych stałych sprężystości występujących w tensorze C_{ijkl} ulega znacznemu zmniejszeniu, gdy weźmie się pod uwagę własności tensorów naprężenia i odkształcenia.

Ponieważ oba tensory są symetryczne ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ oraz $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$), więc muszą wystąpić zależności:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (4.4a)$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (4.4b)$$

Na skutek związków (4.4) wystąpi tylko sześć niezależnych kombinacji wskaźników i, j oraz sześć niezależnych kombinacji wskaźników k, l . Oznacza to, że liczba niezależnych stałych sprężystości wyniesie 36.

Rozpatrując funkcję energii odkształcenia sprężystego, można wykazać, że zachodzi zależność:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (4.5)$$

Z zależności (4.5) i (4.4) wynika, że liczba niezależnych stałych sprężystości w uogólnionym prawie Hooke'a, w najbardziej ogólnym przypadku anizotropii, wynosi 21. Liczba niezależnych stałych sprężystości zmniejsza się, gdy materiał wykazuje symetrię własności sprężystych. W przypadku symetrii własności sprężystych względem płaszczyzny liczba ta zmniejsza się do 13, a gdy wystąpi symetria własności sprężystych względem trzech wzajemnie prostopadłych osi, to otrzymamy dziewięć niezależnych stałych sprężystości.

4.2. Ciała izotropowe sprężyste

Dla materiałów izotropowych sprężyste występują tylko dwie niezależne stałe sprężystości – moduł Younga (E) oraz liczba Poissona (ν). Oczywiście dla materiałów izotropowych sprężyste można zdefiniować wiele różnych stałych sprężystości, lecz stałe takie są zawsze kombinacją E oraz ν . Dla przypomnienia, liczba Poissona (zwana również współczynnikiem Poissona) jest definiowana jako stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia wzdłużnego w próbie rozciągania (w zakresie sprężystym). Liczba Poissona przyjmuje wartości w zakresie 0,0–0,5, przy czym wartość zero przyjmuje dla materiałów idealnie sprężystych, wartość 0,5 dla materiałów idealnie plastycznych, a wartość 0,28–0,30 dla typowych stali węglowych.

6.3. Wpływ warunków odkształcenia na plastyczność

Przejście materiału ze stanu sprężystego w stan plastyczny należy traktować jako moment krytyczny. Materiał przestaje się odkształcać sprężysto (w sposób odwracalny), gdy zaczyna płynąć, czyli odkształcać się plastycznie. Drugim stanem (momentem) krytycznym jest moment utraty spójności materiału. Oba momenty (stany) krytyczne łatwo można zaobserwować na wykresie rozciągania (rys. 4.1), gdy materiał po osiągnięciu granicy plastyczności zaczyna odkształcać się plastycznie, a po przekroczeniu R_m (gdzie tworzy się szyjka) rozpoczyna się zakres odkształceń nierównomiernych (przewężeniowych), zakończony momentem zerwania próbki (przy naprężeniu zerwania R_u).

Wiele materiałów w warunkach normalnych nie przechodzi w stan plastyczny, tylko ulega pęknięciu (zniszczeniu). Takie materiały traktujemy jak materiały kruche. Pod pojęciem warunków normalnych należy rozumieć temperaturę 20°C oraz ciśnienie atmosferyczne 760 mm Hg. Wynika stąd, że nie wszystkie materiały mają zdolność do osiągnięcia stanu plastycznego. Dlatego też wprowadzone zostało pojęcie plastyczności materiałów.

Plastyczność jest to zdolność materiałów do trwałego odkształcenia bez utraty spójności, tzn. bez wystąpienia pęknięć. Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że plastyczność nie jest własnością materiału. Plastyczność przedstawia stan, w jakim materiał się znajduje.

Dlaczego plastyczność nie jest własnością materiału (jak niestety stwierdza się w wielu publikacjach)? Plastyczności nie można uważać za własność, gdyż zależy ona od wielu warunków (parametrów) procesu odkształcania. Zmieniając te warunki, można zmieniać plastyczność, a nawet można osiągnąć zupełny zanik plastyczności, co występuje przykładowo w bardzo niskich temperaturach odkształcania. Równocześnie stwarzając odpowiedni stan naprężenia, możemy uzyskać odkształcenia plastyczne w materiałach, które w warunkach normalnych są materiałami kruchymi.

Do podstawowych warunków (parametrów) odkształcania wpływających na plastyczność zaliczamy:

- temperaturę odkształcania,
- skład chemiczny materiału, w tym domieszki będące m.in. wynikiem procesu metalurgicznego,
- rodzaj sieci krystalograficznej materiału,
- stan naprężenia.

Wpływ temperatury na plastyczność jest ściśle związany z tzw. energią aktywacji dyslokacji. W zdecydowanej większości metali i stopów wzrost temperatury powoduje wzrost plastyczności materiałów na skutek obniżenia krytycznej wartości energii aktywacji dyslokacji. Z tej właśnie przyczyny nagrzewa się materiały przed przeróbką plastyczną do bardzo wysokich temperatur, aby uzyskać znaczny wzrost plastyczności. Nagrzewanie materiału prowadzi równocześnie do obniżenia naprężenia uplastyczniającego materiału, co powoduje obniżenie sił potrzebnych do odkształcania. Należy pamiętać, że wzrost plastyczności ze wzrostem temperatury nie zawsze jest monotoniczny, gdyż istnieją często takie zakresy temperatur, w których następuje lokalne obniżenie plastyczności, związane przykładowo z przemianą fazową.

Skład chemiczny stopów (np. stali) bardzo wyraźnie wpływa na plastyczność. Niektóre pierwiastki stopowe powodują wzrost plastyczności. Równocześnie część pierwiastków

stopowych może tworzyć składniki strukturalne, które prowadzą do obniżenia plastyczności. W przypadku stali na plastyczność bardzo wyraźnie wpływają domieszki będące wynikiem procesu metalurgicznego. Przykładowo siarka i fosfor powodują obniżenie plastyczności. Plastyczność również obniżają gazy zawarte w stali, w tym głównie tlen i wodór. Tlen tworzy w stali trudno odkształcalne tlenki metali, a wodór, występujący w postaci cząsteczkowej, może powodować powstanie mikropęknięć w stali, co powoduje obniżenie jej plastyczności.

Metale i stopy metali krystalizują w różnych sieciach krystalograficznych. Największą plastyczność wykazują materiały metaliczne, które mają sieć krystalograficzną regularną przestrzennie centrowaną (sieć A1). Taką sieć mają m.in. następujące metale: złoto (Au), srebro (Ag), miedź (Cu), aluminium (Al), nikiel (Ni), a także żelazo gamma (Fe γ).

Niższą plastyczność wykazują metale i ich stopy, które krystalizują w strukturze krystalograficznej regularnej przestrzennie centrowanej (sieć A2), jak np.: żelazo alfa (Fe α), chrom (Cr), molibden (Mo). Najniższą plastyczność w temperaturze pokojowej wykazują metale i stopy mające sieć heksagonalną, jak np. cynk, tytan, magnez.

Bardzo duży wpływ na plastyczność wywiera stan naprężenia występujący w czasie odkształcania. Obowiązuje tutaj ogólna zasada: im mniejsze jest naprężenie średnie (σ_M), tym materiał wykazuje większą plastyczność. Należy przy tym pamiętać o przyjętej umowie, że naprężenia ściskające są ujemne, a naprężenia rozciągające są dodatnie. Łatwo jest wykazać, że naprężenia ściskające (czyli ujemne) podwyższają plastyczność, a naprężenia rozciągające (dodatnie) je obniżają. Weźmy pod uwagę dwie powszechnie znane próby: próbę rozciągania i próbę ściskania.

- 1) W próbie rozciągania występują naprężenia:

$$\sigma_{(1)} > 0; \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 0$$

Naprężenie średnie w próbie rozciągania, zgodnie z zależnością (2.62b), wyniesie:

$$\sigma_M = \frac{1}{3}\sigma_{(1)} > 0 \quad (6.16)$$

- 2) W próbie ściskania mamy następujący stan naprężenia:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0; \sigma_{(3)} < 0$$

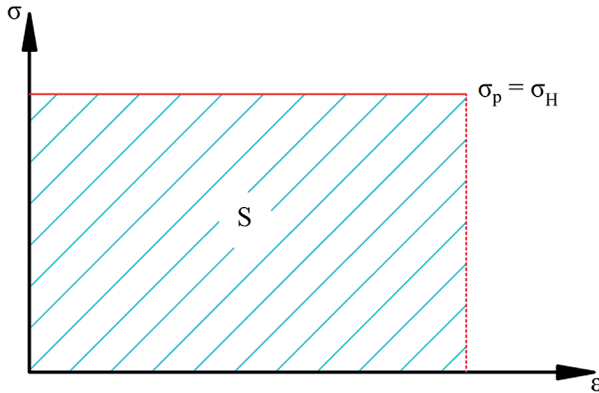
Naprężenie średnie w próbie ściskania wynosi:

$$\sigma_M = \frac{1}{3}\sigma_{(3)} < 0 \quad (6.17)$$

Weźmy ten sam materiał (np. dwie próbki z tej samej miękkiej stali węglowej) i przeprowadźmy próby rozciągania i ściskania. W próbie rozciągania pęknięcie próbki wystąpi przy odkształceniu około 40%, podczas gdy w próbie ściskania otrzymamy bardzo duże odkształcenie (nawet około 80%) i nie wystąpią objawy zniszczenia próbki. Wynika stąd, że ten sam materiał wykazał większą plastyczność w próbie ściskania, w czasie której występowały ujemne naprężenia średnie.

6.8. Praca i moc odkształcenia

Weźmy pod uwagę wykres rozciągania materiału sztywno-idealnie plastycznego, pokazanego schematycznie na rysunku 6.9.



Rys. 6.9. Schemat wykresu rozciągania materiału sztywno-idealnie plastycznego

Pokazany na rysunku 6.9 wykres rozciągania materiału sztywno-idealnie plastycznego jest często stosowaną modelową reprezentacją własności reologicznych materiału ze względu na duże podobieństwo do zachowania się materiału w rzeczywistych warunkach odkształcania na gorąco. Pole pod wykresem rozciągania (rys. 6.9) wynosi:

$$S = \sigma \cdot \varepsilon = \frac{F}{S_0} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6.67)$$

Z prostej analizy zależności (6.67) mamy:

$F \cdot \Delta l$ – praca odkształcenia plastycznego przy jednoosiowym rozciąganiu,
 $S_0 \cdot l_0$ – objętość rozciąganej próbki.

Wyrażenie (6.67) opisuje więc jednostkową pracę odkształcenia plastycznego (czyli pracę przypadającą na jednostkę objętości) w próbie jednoosiowego rozciągania.

W wypadku złożonego stanu naprężeń i odkształceń należy wykonać sumowanie prac we wszystkich kierunkach. Korzystając z umowy sumacyjnej Einsteina oraz uwzględniając fakt, że praca jest wielkością skalarną, takie sumowanie można zapisać w postaci zależności:

$$w = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (6.68)$$

gdzie:

w – jednostkowa praca odkształcenia plastycznego,
 σ_{ij} – tensor naprężenia,
 ε_{ij} – tensor odkształceń plastycznych.

Wykorzystując definicje całkowitego zastępczego naprężenia oraz całkowitego zastępczego odkształcenia, równanie (6.68) można zastąpić zależnością:

$$w = \sigma_H \cdot \varepsilon_H \quad (6.69)$$

gdzie:

σ_H – całkowite zastępcze naprężenie,
 ε_H – całkowite zastępcze odkształcenie.

Zgodnie z warunkiem plastyczności HMH (zależność (6.37)), równanie (6.69) możemy zapisać w postaci:

$$w = \sigma_p \cdot \varepsilon_H \quad (6.70)$$

W stanie plastycznym mamy do czynienia z ciałem nieściśliwym, więc całkowite zastępcze odkształcenie plastyczne zapisujemy w postaci (3.147):

$$\varepsilon_H = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}$$

gdyż dla ciała nieściśliwego dewiatory odkształcenia są równe tensorom odkształcenia ($\hat{e}_{ij} = e_{ij}$; $\hat{l}_{ij} = l_{ij}$ oraz $\hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}$).

Wstawiając (3.147) do (6.70), otrzymamy zależność na jednostkową pracę odkształcenia plastycznego:

$$w = \sigma_p \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \quad (6.71)$$

Całkowitą pracę odkształcenia plastycznego otrzymamy drogą całkowania pracy jednostkowej po objętości ciała:

$$W = \int_V w dV = \int_V \sigma_p \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \quad (6.72)$$

gdzie:

W – całkowita praca odkształcenia plastycznego,
 V – objętość ciała,
 w – jednostkowa praca odkształcenia plastycznego dana zależnością (6.71).

Jednostkową moc odkształcenia plastycznego (\dot{w}) obliczamy (zgodnie z definicją mocy) jako pochodną pracy jednostkowej względem czasu:

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} \quad (6.73)$$

Wstawiając (6.68) do (6.73), otrzymamy:

$$\dot{w} = \frac{d}{dt} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \quad (6.74)$$

Zakładamy, że $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}(t)$ oraz korzystamy z definicji prędkości odkształcenia:

$$\dot{w} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (6.75)$$

gdzie:

\dot{w} – jednostkowa moc odkształcenia plastycznego,

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ – tensor prędkości odkształcenia plastycznego.

Wykorzystując definicje całkowitego zastępczego naprężenia oraz intensywności prędkości odkształcenia, równanie (6.75) zapisujemy w postaci:

$$\dot{w} = \sigma_H \dot{\varepsilon}_H \quad (6.76)$$

gdzie:

σ_H – całkowite zastępcze naprężenie,

$\dot{\varepsilon}_H$ – intensywność prędkości odkształcenia.

Wykorzystujemy warunek plastyczności HMH (zależność (6.37)), w wyniku czego równanie (6.76) przyjmie postać:

$$\dot{w} = \sigma_p \dot{\varepsilon}_H \quad (6.77)$$

W stanie plastycznym mamy do czynienia z ciałem nieściśliwym, więc intensywność prędkości odkształcenia oblicza się z wzoru (3.173):

$$\dot{\varepsilon}_H = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}$$

gdyż dla ciał nieściśliwych dewiatory prędkości odkształcenia są równe tensorom prędkości odkształcenia. Zależność (3.173) wynika bezpośrednio z równań (3.171a) oraz (3.168a) przy przyjęciu: $\hat{l}_H = \dot{\varepsilon}_H$; $\hat{M}_2 = \dot{M}_2$; $\hat{l}_{ij} = \dot{l}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$.

Wstawiając (3.173) do (6.77), otrzymamy zależność na jednostkową moc odkształcenia plastycznego:

$$\dot{w} = \sigma_p \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (6.78)$$

Całkowitą moc odkształcenia plastycznego otrzymamy w wyniku całkowania mocy jednostkowej po objętości ciała:

$$\dot{W} = \int_V \dot{w} dV = \int_V \sigma_p \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} dV \quad (6.79)$$

gdzie:

\dot{W} – całkowita moc odkształcenia plastycznego,

\dot{w} – jednostkowa moc odkształcenia plastycznego,

V – objętość ciała.

8.2. Równanie ciągłości przepływu

W podrozdziale 2.3.2, wyprowadzając równania równowagi ośrodków ciągłych (na podstawie równań ruchu Eulera–Newtona), otrzymano zależność (2.34):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$$

Równanie (2.34) otrzymano z prawa zachowania masy. W mechanice płynów równanie to nosi nazwę równania ciągłości przepływu dla płynu ściśliwego.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę płyn nieściśliwy ($\rho = \text{const}$), to zmiana gęstości w czasie jest równa zero zgodnie z równaniem (2.35):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$$

Obliczamy pochodną iloczynu, przyjmujemy że $\rho \neq \rho(x_j)$, dzielimy obustronnie (2.34) przez gęstość i otrzymujemy zależność (2.37):

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Równanie (2.37) jest prawdziwe dla płynów nieściśliwych, mających taką samą gęstość w całej objętości, zarówno dla przepływu ustalonego, jak i nieustalonego.

8.3. Równanie ruchu Eulera dla płynu doskonałego

W podrozdziale 2.3.2 wyprowadzono równanie (2.41), które jest równaniem ruchu Eulera dla ośrodków ciągłych:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

gdzie:

ρ – gęstość ciała,

$\frac{Dv_i}{Dt}$ – pochodna materialna prędkości,

σ_{ij} – tensor naprężenia,

X_i – jednostkowa siła masowa.

Należy pamiętać, że we wzorze (2.41) jednostkowa siła masowa (X_i) jest traktowana jako siła masowa przypadająca na jednostkę objętości ciała.

W celu otrzymania równań ruchu Eulera dla płynu doskonałego należy w równaniu (2.41) uwzględnić:

- stan naprężenia występujący w płynie doskonałym,
- odmienną (w stosunku do mechaniki ciała stałego) definicję jednostkowej siły masowej.

W płynie występuje ciśnienie (p), które zgodnie z prawem Pascala jest takie samo we wszystkich kierunkach i we wszystkich punktach cieczy.

Tensor σ_{ij} w płynie jest więc tensorem kulistym, co możemy zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

W związku z tym w równaniu (2.41) w miejscu pochodnej $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ pojawi się gradient ciśnienia, gdyż nie występują w tensorze (8.5) naprężenia styczne, a pochodne naprężeń leżących na przekątnej głównej tensora σ_{ij} są równe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Zgodnie z (1.37a), wyrażenia (8.6) są składowymi gradientu ciśnienia ($\text{grad } p$). Uwzględniając (8.6) w (2.41), otrzymamy:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = X_i - \text{grad } p \quad (8.7)$$

Znak minus wynika z faktu, że ciśnienie p należy traktować jak naprężenie ściskające. Dzielimy obustronnie (8.7) przez gęstość (ρ) i otrzymujemy:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{X_i}{\rho} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (8.8)$$

Zgodnie z praktyką przyjętą w mechanice płynów, jednostkowa siła masowa (F_m) jest definiowana jako siła przypadająca na jednostkę masy ciała (patrz podrozdział 1.4). Na podstawie zależności (1.21) i (1.22) możemy więc zapisać, że:

$$\frac{X_i}{\rho} = F_m \quad (8.9)$$